中山大学本科生练习考试

考试科目:《高数一练习题》(A 卷)

学年学期:	2022–2023 学年第 2 学期	姓　名:	________
学　院/系:	数学学院	学　号:	________
考试方式:	闭卷	年级专业:	________
考试时长:	120 分钟	班　别:	________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 15 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right]$

解析

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}}{x}\\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}\\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}\\
&= -\frac{\mathrm{e}}{2}
\end{aligned}$$

2. $z = x\ln\left(x^2+y^2\right)$，求在 $(1,2)$ 处的全微分

解析

$$\frac{\partial x\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} = \frac{2x^2+(x^2+y^2)\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{2}{5}+\ln 5$$

$$\frac{\partial x\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{4}{5}$$

$$\mathrm{d}z = (\frac{2}{5}+\ln 5)\mathrm{d}x + \frac{4}{5}\mathrm{d}y$$

3. 计算积分 $I = \oint_{L^+} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中 L^+ 为椭圆周：

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1 \end{cases}$，其中 $a>0, b>0$

从 x 轴正向看去，L^+ 沿逆时针方向。

解析　利用斯托克斯公式.

$$\oint_\Gamma = \iint_{\Sigma(\text{上})} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma(\text{上})} (-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

由于 Σ 的方程为: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$, 则

$$\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

故

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma &= -2\iint_{D_{xy}} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 0 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -2\left(\frac{b}{a}+1\right)\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\left(\frac{b}{a}+1\right)\pi a^2 = -2\pi a(a+b).\end{aligned}$$

4. $y''+y = x\cos 2x + \sin x, y(0)=0, y'(0)=\dfrac{1}{18}$

提示　北大下 p192 例题 7

解析

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda = \pm\mathrm{i}$$

对应的齐次方程的解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

方程的非齐次项由两项组成, 且余弦函数与正弦函数中的角度不等. 因而不属于表中所列的几种类型，这时可先分别求出方程 1

$$y''+y = x\cos 2x$$

与方程 2

$$y''+y=\sin x$$

的特解. 再将所求得的两特解相加, 即得原方程的特解.
故设有特解

$$y(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x.$$

代入方程 1 得

$$(-3Ax - 3B + 4C)\cos 2x + (-3Cx - 3D - 4A)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数得

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ -3B + 4C = 0, \\ 3C = 0, \\ 3D + 4A = 0 \end{cases}$$

由此解得

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{4}{9}$$

所以方程 1 有特解

$$y_1(x) = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

对于方程 2, 其右端是 $a\cos x + b\sin x$ 的形式, 且 $\pm i$ 正好是其齐次方程的特征根, 所以设 (9.85) 有特解

$$y(x) = x(M\cos x + N\sin x)$$

代入方程 2 得

$$2N\cos x - 2M\sin x = \sin x$$

由此推出 $N = 0, M = -\frac{1}{2}$. 因而方程 2 有特解

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$$

以上两特解之和为原方程之特解, 故有

$$y^*(x) = y_1(x) + y_2(x) = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

又因为 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{18}$
方程的解为

$$y = \frac{1}{18}(8\sin(2x) - 9x\cos(x) - 6x\cos(2x))$$

5. (1) 证明 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.
   (2) 求积分值。

提示 书上第 314 面原题

提示 $g(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

6. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

提示 证明 $\frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

提示 第 280 页第三题

解 **解法一** 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n+1} (-\infty < x < +\infty)$, 则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x (-\infty < x < +\infty)$$

所以 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x te^t\, dt = xe^x - e^x + 1 (-\infty < x < +\infty)$,

$$\text{从而} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = f(1) = 1.$$

解法二 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$$

对等号两边求导

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

当 $x = 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$